KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

METODE OPTIMIZACIJE I NJIHOVA PRIMJENA U GRAĐEVINARSTVU- *nastavak*

1. Linearno programiranje -

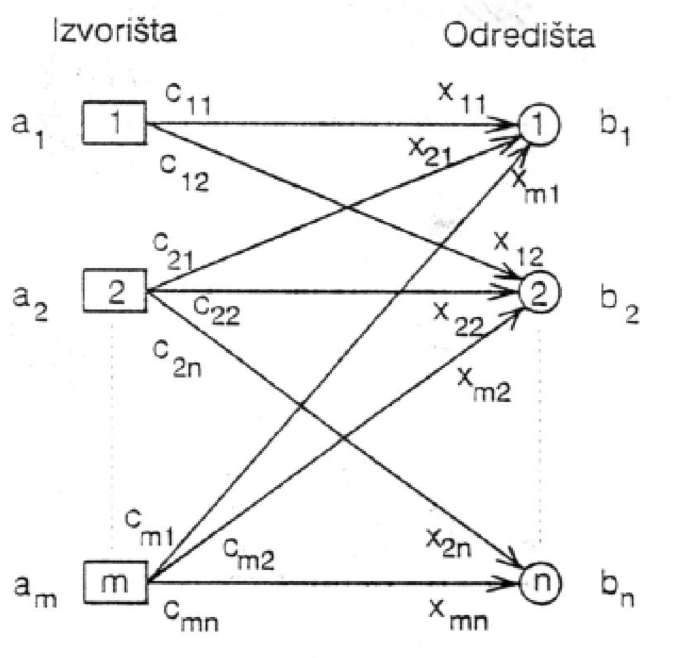
1. **grafička metoda**
2. **simpleks metoda**
3. **transportni problemi**

predavanja koncipirana uglavnom na osnovu knjige:
Ž. Praščević, N. Praščević- Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Beograd 2009

P12

Transportni zadatak (problem)

- **Transportni zadatak-** specijalni zadatak iz oblasti linearnog programiranja, koji se odnosi na određivanje optimalnog plana prevoženja nekog materijala ili robe od mjesta otpreme (izvorišta) do mjesta potrošnje (odredišta) ***xij*** koji će najmanje koštati.
- x_{ij} **-** količine materijala koje treba transportovati od izvorišta *i* do odredišta *j*
- c_{ij} poznata cijena transporta po jedinici mjere robe od izvorišta *i* do odedišta *j*
- a_i **–** ukupne količine materijala koje treba transportovati od izvorišta *i* (kapacitet izvorišta)
- b_j **–** ukupne količine materijala koje treba transportovati do odredišta *j* (kapacitet odredišta)
- ***z-*** funkcija cilja – ukupni troškovi transporta



Sl. Shema transportnih puteva

rješavanje u obliku tabele

Odrediđta b Izvorišta a	**b1**	**b2**	**..**	**bn**
a1	c11 x11	c12 x12	..	c1n x1n
a2	c21 x21	c22 x22	..	c2n x2n
...	....	...	..	....
am	cm1 xm1	cm2 xm2	..	cmn xmn

Opšta formulacija transportnog zadatka: matematički model

Transporni zadatak- odrediti količine materijala $\boldsymbol{x_{ij}}$ koje treba transportovati od izvorišta *i* do odredišta *j* tako da ukupna cijena transporta bude minimalna.

1. **Funkcija cilja:**

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

2. **Uslovi ograničenja:**
   - iz izvorišta se transportuje sva proizvedena količina

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad a_i > 0, \qquad i = 1,2 \ldots . m$$

   - u odredišta se doprema ukupno potrebna količina

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad b_j > 0, \qquad j = 1,2 \ldots . n$$

   - prirodni uslovi nenegativnosti (količina transportovanih roba pojedinim trasama je nenegativna vrijednost)

$$x_{ij} \geq 0, \qquad j = 1,2 \ldots . n, x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2 \ldots . m$$

Zatvoreni i otvoreni transportni zadatak

- **Zatvoreni transportni zadatak**: ako se sve što se nalazi u izvorištima doprema do odredišta, odnosno ako je ispunjen uslov

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad i = 1,2 \ldots . m \ , j = 1,2 \ldots . n$$

$$i$$

- **Otvoreni transportni zadatak** – kada nije ispunjen prethodni uslov, odnosno kada važi:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \neq \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad i = 1,2 \ldots . m \ , j = 1,2 \ldots . n$$

$$i$$

- **Može se riješti samo zatvoreni transportni zadatak** a otvoreni se na određeni način svodi na zatvoreni, pa se tada i on može riješiti.
  - ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$$

onda se otvoreni transportni zadatak svodi na zatvoreni dodavanjem još jednog odredišta (u ovom slučaju skladišta) koje može da primi razliku (višak iz izvorišta). To u tabeli znači dodavanje još jedne kolone, a količine u toj koloni predstavljaju količine koje se neće transportovati od izvorišta, pa su cijene transporta u toj koloni jednake 0

  - ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j < 0$$

onda se otvoreni transportni zadatak svodi na zatvoreni dodavanjem još jednog fiktivnog izvorišta koje predstavlja nedostajuće količine koje se u stvari ne transportuu (jer ih nema). U tabeli to znači dodavanje jednog reda, a cijene u tom reu su jednake 0, jer nema njihovog transporta.

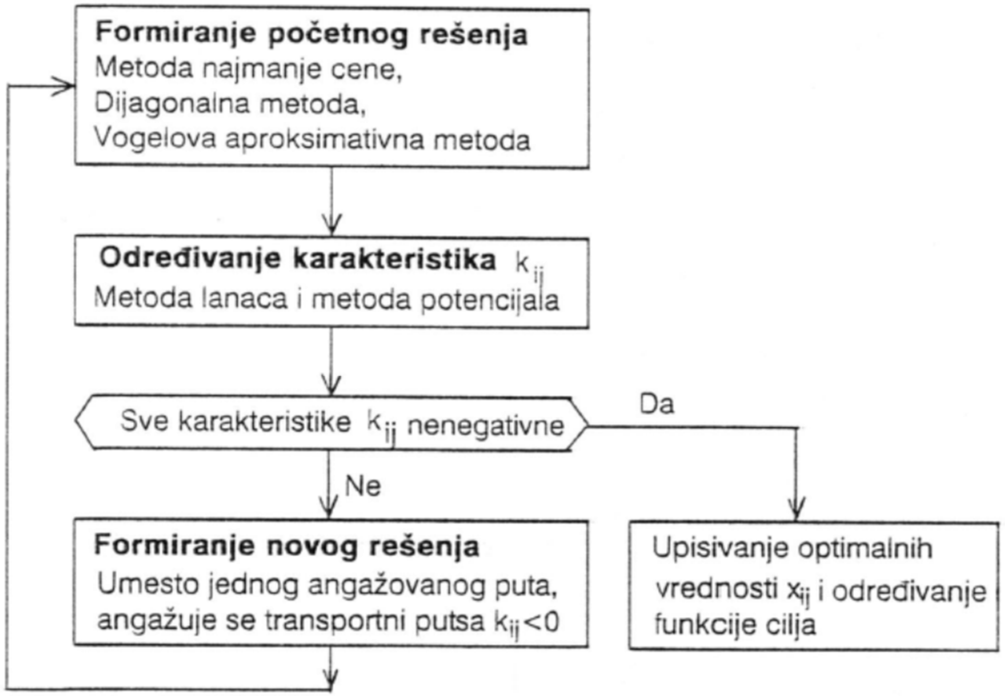
Rješavanje zatvorenog transportnog zadatka

- Može se riješti samo zatvoreni transportni zadatak a otvoreni se na svodi na zatvoreni, pa se tada i on može riješiti istim metodama, kao i zatvoreni
- Uslovi za rješavanje transportnog zadatka
  1. broj nepoznatih ***xij*** koje treba odrediti je ***m x n***
  2. broj uslova ograničenja ***m+n*** (izvorista+odredista)
  3. broj **nezavisnih** uslova ograničenja (za zatvoreni transportni zadatak) je manji za jedan, jer postoji i uslov jednakosti kapaciteta izvorišta i odredišta ***m + n -1***
  4. kako je veći broj nepoznatih od broja jednačina onda se iz sistema nezavisnih jednačina (njih ***m+n-1)*** može izabrati upravo ***m+n-1*** <u>bazisnih promjenljivih</u> koje će se izraziti preko preostalih ***m x n-(m+n-1)*** <u>slobodnih promjenljivih</u>
  5. to znači da će od ***m x n*** puteva transporta ***m+n-1*** puteva biti angažovano za transport, kako bi se sistem mogao riješiti (na njima će $x_{ij}>0$)
  6. ukoliko se u nekom koraku dobije manje od ***m+n-1*** puteva (polja) onda se dobija <u>degenerisano rješenje</u>
  7. da bi se provjerila optimalnost degenerisanog rješenja nedostajući broj polja (do m+n-1) mora smatrati angažovanim tako da se njih upiše količina ε koja teži 0
- Moguće je modelovati i rješavati problem gdje neki od puteva između ***ai*** izvorišta i ***bj*** odredišta nije moguć. U takvom polju ***ij*** se upisuje cijena transporta ***cij*** nekoliko desetina puta veća od najveće cijene na ostalim transportnim putevima. U postupku iznalaženja optimalnog (minimalnog) rješenja ovo polje će sigurno biti isključeno iz bazičnih promjenljivih, odnosno ***xij*** će biti jednako nuli, kako bi funkcija cilja postigla minimum.

Postupak rješavanja

- Zatvoreni transportni zadatak se jedino može rješavati.
- može se primijeniti simpleks metoda, ali je najčešće potrebno mnogo proračuna zbog velikog broja promjenljivih

- **TRANSPORTNA METODA-** iterativni postupak, čiji su koraci:
  1. utvrđivanje početnog baznog rješenja u formi tabele (za ovo su razvijene posebne metode iznalaženja početnog rješenja)
  2. provjera optimalnosti rješenja (po posebnim metodama za provjeru optimalnosti rješenja)
  3. iznalaženje poboljšanog rješenja (preraspodjela količina i angažovanje novih transportnih puteva) i ponavljanje koraka 2 i 3 dok se ne nađe optimalno rješenje.



Sl. Dijagram toka rešavanja transportnog problema

1. Metode iznalaženja početnog rješenja

- cilj ovih metoda je naći početno rješenje koje ima ***m+n-1*** promjenljivih većih od 0. Ove promjenljive se upisuju u odgovarajuća polja tabele.
- **Angažovana polja** (putevi) su ona polja u tabeli gdje je utvrđeno da postoji xij>0 (u početnom rješenju, ili nakon poboljšanja rješenja)
- **neangažovana polja** (putevi) su ona polja u kojima je pretpostavljeno da je xij=0
- Karakteristike metoda za početno rješenje
  1. promjenljive se pretpostavljaju po određenoj šemi u tabeli, ali tako da ih ima tačno m+n-1 koje su veće od 0; ako ih ima mannje od ovog broja onda se radi o <u>degenerisanom rješenju</u>
  2. metode treba da budu što jednostavnije
  3. metode treba da daju početno rješenje koje je što bliže optimalnom, kako bi se radio manji broj iteracija
- metode za iznalaženje početnog rješenja:
  – dijagonalna metoda (metoda sjeverozapadnog ugla)
    - najjednostavnija;
    - u početnom rasporedu se ne vodi računa o cijenama transporta na pojedinim transportnim putevima
    - popunjava se maksimalnim kapacitetom polje u gornjem lijevom uglu tabele, a zatim se nakon isključivanja reda ili kolone ponovo popunjava polje u gornjem lijevom uglu preostale tabele, sve dok se ne rasporede sve količine
  – metoda najmanje cijene (u koloni, ili redu ili u tabeli)- slična joj je i metoda dvostrukog precrtavanja
    - prilično jednostavna;
    - u početnom rasporedu se vodi računa o tome da se najprije popune polja (putevi) koja imaju najmanju cijenu
  – Vogelova (Fogelova) aproksimativna metoda (VAM)
    - komplikovanija od prethodnih;
    - u početnom rasporedu se vodi računa o tome da se najprije popune polja (putevi) u redu ili koloni koji ima najveću razliku između dvije najmanje cijene u redu odnosno koloni
    - daje rješenje vrlo blisko optimalnom

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **DIJAGONALNA METODA**
  - najprije se popunjava gornje lijevo polje (1,1) sa najvećom mogućom količinom =min(a1,b1)
  - isključi se red ili kolona iz daljeg razmatranja čiji su kapaciteti utrošeni
  - ponovo se gornjem lijevom polju preostale tabele raspoređuje najveća količina, i to se ponavlja dok se sve količine ne raspodjele

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **METODA DVOSTRUKOG PRECRTAVANJA**
  - na određeni način se u svakom redu obilježi polje sa najmanjom cijenom *
  - na određeni način se u svakoj koloni obilježi polje sa najmanjom cijenom #
  - popunjavaju se sa najvećom mogućom količinom najprije polja koja imaju obje oznake (ako ih je više onda najprije ono sa najmanjom cijenom od svih takvih)
  - zatim polja koja imaju jednu oznaku,
  - na kraju se upisuju preostale količine u preostala neobilježena polja

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **METODA NAMANJE CIJENE**
  - popunjava se sa najvećom mogućom količinom najprije polje koje ima najmanju cijenu u tabeli,
  - zatim se nakon isključenja potrošenog reda odnosno kolone (kojima je iscrpljen kapacitet) traži novo polje sa najmanjom cijenom, koje se ponvoo popunjava najvećom mogućom količinom $\boldsymbol{x_{ij}}=\min(\boldsymbol{a_i},\boldsymbol{b_j})$
  - postupak se iterativno ponavlja dok se ne rasporede sve količine

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **VAM METODA**
  - sračunavaju se za svaki red razlike dvije najmanje cijene u redu ***(dr_i)***
  - sračunavaju se za svaku kolonu razlike dvije najmanje cijene u koloni ***(ds_j)***
  - popunjava se najprije polje sa najmanjom cijenom u redu, ili koloni gdje je ova razlika najveća. U tom se polju piše najveća moguća količina koja se može transportovati ***xij=***min(***ai,bj***)
  - isključi se red ili kola čiji su kapaciteti istrošeni, pa se ponovo sračunavaju ove razlike i ponavlja se postupak izbora polja na osnovu reda odnosno kolone sa najvećom razlikom dvije preostle najmanje cijene

2. Metode provjere optimalnosti rješenja

- cilj ovih metoda je da provjere da li se može naći bolje rješenje (rješenje koje će imati manju ukupnu cijenu)
- Karakteristike metoda za provjeru optimalnosti
    1. radi se proračun karakteristika ***kij*** za svako neangažovano polje tabele
    2. provjerava se vrijednost karakteristika ***kij***, pa ako postoji makar jedna ***kij*** <0, može se naći bolje rješenje od postojećeg
- metode za provjeru optimalnosti rješenja:
    - metoda potencijala
        - jednostavna;
        - za svako angažovano polje (njih m+n-1) sračunavaju se potencijali reda ***ui*** i potencijali kolone ***vj***
        - pošto ovih potencijala ima m+n, a angažovanih polja m+n-1, jedan se potencijal pretpostavlja, a ostali se sračunavaju
        - za svako neangažovano polje sračunava se karakteristika polja ***kij***
        - ako su sve ***kij*** ≥0 onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta
    - metoda lanaca
        - prilično komplikovana
        - za svako neangažovano polje konstruišu se tzv. lanci
        - za svaki lanac sračunava se karakteristika polja ***kij*** koja zavisi od cijena polja koja su uključena u lanac
        - ako su sve ***kij ≥0*** onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta

Metode provjere optimalnosti rješenja

- **METODA POTENCIJALA**
  - za svako angažovano polje (njih m+n-1) sračunavaju se potencijali reda ***ui*** i potencijali kolone ***vj***
  - pošto ovih potencijala ima m+n, a angažovanih polja m+n-1, jedan se potencijal pretpostavlja, a ostali se sračunavaju
  - za svako neangažovano polje sračunava se karakteristika polja ***kij=cij-(ui+vj)***
  - ako su sve ***kij ≥0*** onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta

Metode provjere optimalnosti rješenja

- **METODA LANACA**
  - za svako neangažovano polje konstruišu se tzv. lanci zatvoreni poligon sa parnim brojem tjemena,
  - jedno tjeme se nalazi u neangažovanom polju za koje se lanac konstruiše, a ostala se nalaze u angažovanim poljima
  - u tjemenima lanca se upisuju cijene transporta za to polje i to tako da se cijen neangažovanog polja uzima sa znakom +, a zatim se u smjeru kazaljke na satu cijene naizmjenično obilježavaju sa -, odnosno +.
  - za svaki lanac sračunava se karakteristika polja ***kij*** koja predstavlja zbir cijena polja koja su uključena u lanac (sa odgovarajućim predznakom koji im je dodijeljen prema prethodnom pravilu)
  - ako su sve ***kij ≥0*** onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta

3. Metoda iznalaženja poboljšanog rješenja

- **METODA PRERASPODJELE KOLIČINA DUŽ LANACA**
  - lanci koje smo pomenuli prethodno, u stvari predstavljaju sva polja tabele koja su povezana uslovima ograničenja,
  - ako se iz jednog angažovanog polja koje odgovara tjemenu lanca, količina koja se transportuje u tom polju smanji, radi uslova ravnoteže će biti potrebno da se u tjemenima lanca sa pozitivnim predznakom ta količina doda, a u poljima koja odgovaraju tjemenima lanca sa negativnim predznakom ta količina umanji.
  - karakteristike ***kij*** sračunate za lance koji su konstruisani za neangažovana polja mjere povećanje, odnosno smanjenje funkcije cilja, ukoliko se duž tog lanca izvrši preraspodjela 1 jedinice mjere količine robe,, tj. $\Delta z = k_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$
  - količina Δx_{ij} koja se može preraspodijeliti duž lanca je najmanja količina u poljima koja odgovaraju tjemenima lanca sa negativnim predznakom
  - zato nas za poboljšano rješenje interesuju samo ona polja kojima odgovaraju negativne karakteristike ***kij*** i to od svih njih ona:
    - ***kij*** koja ima najveću apsolutnu vrijednost ili
    - lanac sa negativnom karakteristikom za koji je maksimalno smanjenje funkcije cilja, tj. $\Delta z = k_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$
  - u svakoj iteraciji se radi preraspodjela samo duž jednog lanca (mada može i simultano ukoliko lanci nemaju zajedničkih tjemena)
  - napomena: ako je ***kij=0,*** onda ima više optimalnih rješenja

Literatura

- Ž. Praščević, N. Praščević: Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Čugura print, Beograd, 2009,